תורת הקבוצות, תרגיל 2

1. יהיו R, S יחסי שקילות. נתבונן ביחסים המוגדרים בצורה הבאה:
   $x(R \cup S)y$ אם ורק אם xRy או xSy.
   $x(R \cap S)y$ אם ורק אם xRy וגם xSy.
   $x(R \setminus S)y$ אם ורק אם xRy ולא מתקיים xSy.
   $x(R \triangle S)y$ אם ורק אם מתקיימת בדיוק אחת האפשרויות xRy או xSy.

   אלו מן היחסים הם יחסי שקילות?

2. עבור היחסים הבאים, קבע אילו מהם יחסי שקילות. עבור יחסי השקילות שביניהם, מצא את מחלקות השקילות.
   א. xSy אם ורק אם קיים $\alpha > 0$ ממשי כך, ש- $x = \alpha y$. [היחס מוגדר על הקבוצה $C \times C$].
   ב. xSy אם ורק אם $(x - y) \in Z$. [היחס מוגדר על הקבוצה $R \times R$].
   ג. xSy אם ורק אם $x/y > 0$. [היחס מוגדר על הקבוצה $R \times R$].
   ד. xSy אם ורק אם $x \cap y \neq \emptyset$. [היחס מוגדר על $P(N) \times P(N)$].

3. יהא R יחס. הוכח, כי קיים יחס S סימטרי (כלומר, יחס עבורו לכל x, y, אם xSy אז בהכרח ySx) המכיל את R (כלומר, לכל x, y אם xRy אז xSy) כך, שכל יחס סימטרי המכיל את R בהכרח מכיל גם את S.

4. תהיינה $f : X \to Y, g : Y \to Z$ פונקציות. הוכח או הפרך את הטענות הבאות:
   א. אם f, g על אז גם $g \cdot f$ על.
   ב. אם $g \cdot f$ חח"ע אז גם f חח"ע.
   ג. אם $g \cdot f$ חח"ע אז גם g חח"ע.
   ד. אם f על ו- $g \cdot f$ חח"ע אז g חח"ע.

תאריך ההגשה: 9.3.2005